

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} représentative de f ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

- Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 . Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

- Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

- Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente? On justifiera la réponse.
- Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- Calculer S_0, S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
- Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
- Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z .

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
- On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
- Restitution organisée de connaissances**
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe \bar{z} défini par $\bar{z} = x - iy$.
Démontrer que :
— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
- Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué \bar{z} est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Annexe 4 de l'exercice 1 à rendre avec la copie

