

EXERCICE I (10)

On admet que $a^b = e^{b \ln a}$ pour $a > 0$ et $b > 0$. $a^b = e^{b \ln a}$

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0; +\infty[$, les couples solutions de l'équation (E): $x^y = y^x$, et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1) Montrer que l'équation (E) est équivalente à: $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

2) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.

La courbe C représentative de la fonction h est donnée ci-dessous; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

a) Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b) Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de h ; retrouver les variations de h .

Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c) Déterminer l'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

3) Soit λ un élément de l'intervalle $]0; \frac{1}{e}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$. Ainsi, le couple (a, b) est solution de (E).

4) On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (On ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes:

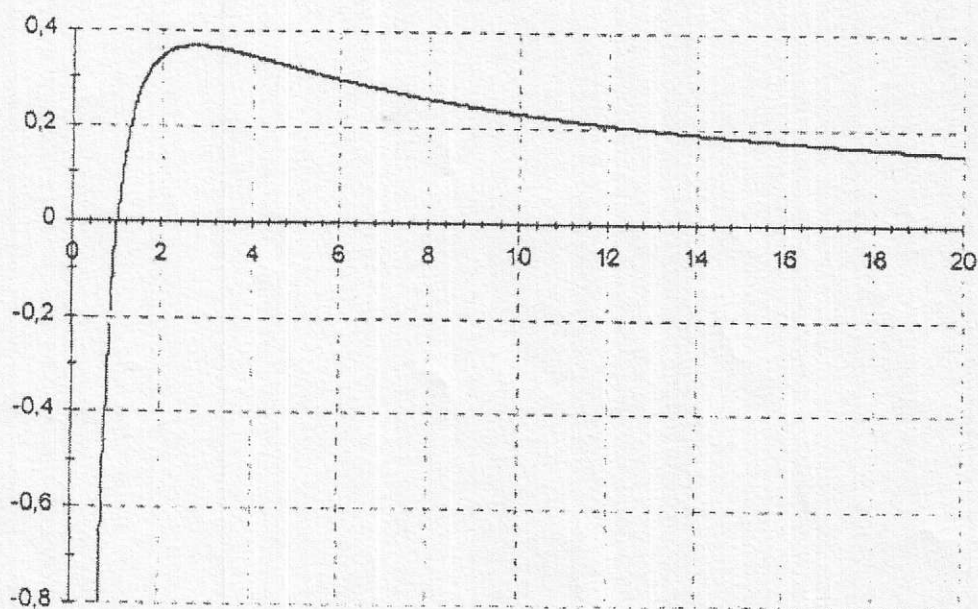
a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures?

b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures?

c) Déterminer les variations de la fonction s . Dresser le tableau de variation de s .

5) Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

Courbe $\mathcal{C}$, obtenue à l'aide d'un traceur de courbe :



EXERCICE 2

(10)

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'évènement «Amélie est arrêtée par le n -ième feu rouge ou orange » et $\bar{E}_n$ l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\bar{E}_n$.

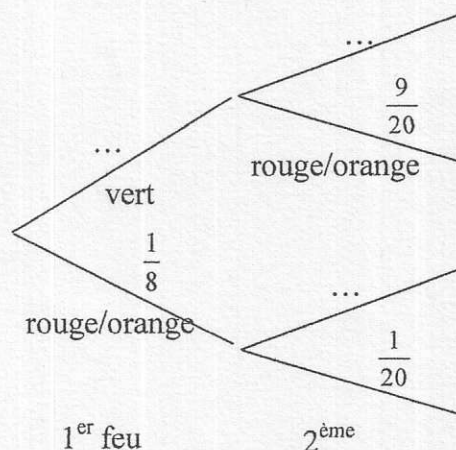
La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $n+1$ ^{ième} feu tricolore soit rouge ou orange, si le n ^{ième} feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- la probabilité que le $n+1$ ^{ième} feu tricolore soit rouge ou orange, si le n ^{ième} feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X .

c. Calculer l'espérance mathématique de X .

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\bar{E}_n}(E_{n+1})$.

b. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n .

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k .

b. Exprimer u_n , puis p_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n , quand n tend vers $+\infty$.