

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0; +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0; +\infty[, f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2) & : f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à $0,2$.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n) , d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n, x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n, y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
- b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
- c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence?
2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $p(x) \in [0; 2]$.
- b. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq y_n \leq 2$.
- c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n) .
- d. La suite (y_n) est-elle convergente?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 2 \left(\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \right)$ et (\mathcal{C}_g) sa courbe représentative.

Supprimée

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).
2. a. Montrer que (\mathcal{C}_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
b. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (\mathcal{C}_g) à l'origine.
4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe (\mathcal{C}_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

Remarque La méthode d'Euler permet de trouver des points "proches" de la courbe représentative d'une fonction f vérifiant (1) et (2).
Il n'est pas utile de connaître ni de comprendre cette méthode : les parties A et B peuvent donc se faire de façon indépendante.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f
 - a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur \mathbb{R} , notée α .
 - c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
 - d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ . (égalité $g(\ell) = \ell$ admise)
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Supprimé →

Annexe exercice 1 du contrôle n°3

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

Partie B

