Contrôle 2 octobre terminale S

Partie A :

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

1) Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition
2) Quelle asymptote peut-on en déduire ?
3) Calculer f'(x)
4) Dresser le tableau de variations complet de f sur]0 ; +∞[
5) Y a-t-il une autre asymptote ? Justifier votre réponse (question de recherche)

Partie B :

1) A l'aide, par exemple de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions dans]0 ; +∞[de l'équation f(x) = x^2 (E)
2) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $\begin{cases} x \neq 0 \\ et \\ x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$
3) Dresser le tableau de variations complet de la fonction g définie sur]-∞ ; +∞ [par $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
   En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution dans]-∞ ; +∞ [qui est strictement positive

Partie C :

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} + 1 = f(u_n) \end{cases}$

Ici f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$

1) Représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique en annexe où sont tracées la courbe représentative de f et la droite d'équation y=x
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier n positif $u_n > n$
3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis sa limite quand n tend vers +∞
4) Que se passe-t-il en prenant $u_0 = -4$?
   En supposant que (u_n) converge vers l, quelle équation doit vérifier l ? (justification non demandée)
   Calculer l dans ce cas

NOM :