Contrôle 1 TES 1 heure

Soit I l'intervalle $[0\,;1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}.$$

Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode :

3. a. ~~Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.~~

   b. En utilisant le graphique ~~précédent~~ fourni en annexe, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

   c. Établir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

   e. ~~Prouver que~~ $\underbrace{\text{la limite } l \text{ de la suite } (u_n) \text{ vérifie } l = f(l)}_{\text{admis}}$, calculer l.

Deuxième méthode :

On considère la suite (v_n) definie par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

   c. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

   d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Annexe jointe à rendre avec la copie

Nom :

Annexe