Exercice 1

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

SUPPRIMÉE

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Exercice 2

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbf{R}$).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

ADMIS

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ vérifie la relation $f(\ell) = \ell$.
2. Supposons $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.
   (a) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   admis
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
3. Supposons maintenant $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0,1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   (b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
      – montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;
      – établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

Supprimé

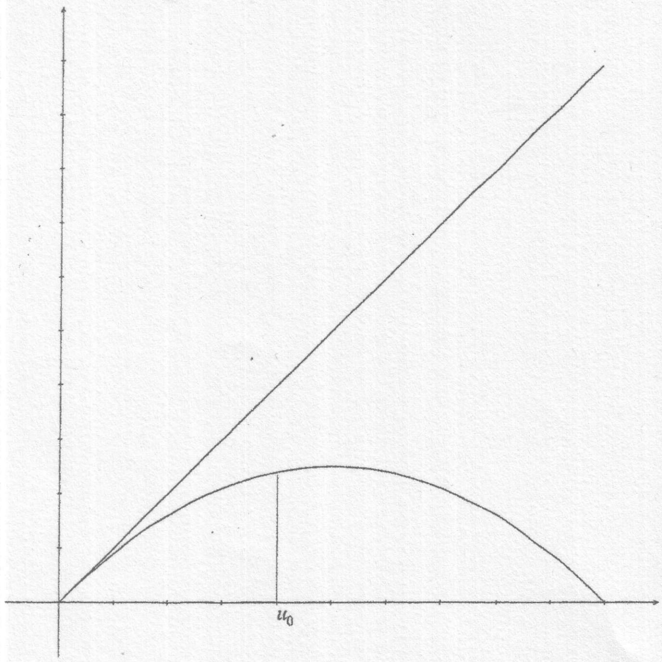
4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.

   Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, $u_2, \ldots$

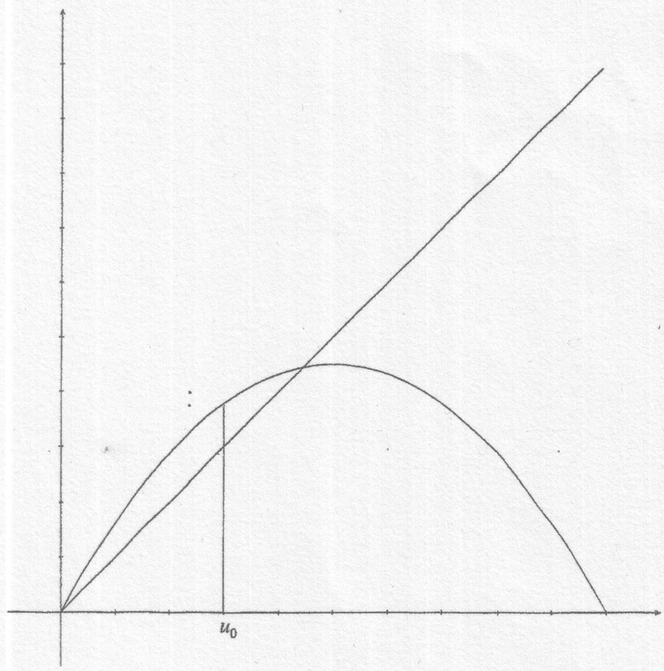
   En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Feuilles annexes

1er cas : $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.



2e cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



3^{e} **cas :** $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.